

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. **XVI**, 9.

---

ÜBER DIE ABHÄNGIGKEIT  
DES TEMPERATURSPRUNGES VON DEM  
AKKOMMODATIONSKOEFFICIENTEN  
NEBST EINIGEN VERWANDTEN WÄRME-  
LEITUNGSPROBLEMEN IN GASEN

VON

SOPHUS WEBER



KØBENHAVN

EJNAR MUNKSGAARD

1939

Printed in Denmark.  
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S, København.

§ 1. Seitdem KUNDT und WARBURG<sup>1</sup> die Aufmerksamkeit darauf lenkten, dass nach der kinetischen Gastheorie ein Temperatursprung an der Grenzfläche zwischen Gase und fester Wand, wenn ein Temperaturgradient in der Richtung der Normale im Gase herrscht, bestehen muss, sind mehrere experimentellen Untersuchungen hierüber ausgeführt.

M. VON SMOLUCKOWSKI<sup>2</sup>, der im Anschluss an die Arbeiten von MAXWELL<sup>3</sup> und von KUNDT & WARBURG, sich mit dem Wärmeaustausch zwischen einem Gase und einer festen Wand eingehend beschäftigte, hat nicht nur experimentelle Untersuchungen über den Temperatursprung ausgeführt, sondern auch diese Erscheinung, ausgehend von den Maxwell'schen Voraussetzungen in Bezug auf die Zurückwerfung der Gasmoleküle von einer festen Wand, theoretisch untersucht.

KUNDT und WARBURG definierten den Temperatursprung,  $\Delta\Theta$ , durch:

$$\Delta\Theta = -\gamma \cdot \frac{d\Theta}{dn},$$

wo  $\Theta$  die Temperatur und  $n$  die Richtung der Normale angibt.

SMOLUCKOWSKI fand experimentell, dass der Temperatursprungskoeffizient,  $\gamma$ , innerhalb einem sehr grossen Druck-

<sup>1</sup> A. KUNDT und E. WARBURG: Pogg. Ann. 156 (1875) p. 177.

<sup>2</sup> M. v. SMOLUCKOWSKI: Wied. Ann. 64 (1898) p. 101.

<sup>3</sup> J. C. MAXWELL: Scient. Pap. 11, p. 681.

bereich mit der mittleren freien Weglänge,  $\lambda$ , im Gase proportional ist, welches auch aus den gleichzeitigen Observationen von BRUSH<sup>1</sup> hervorgeht.

Später hat GEHRCKE<sup>2</sup> mit einem sehr verbesserten Apparat die Messungen von SMOLUCKOWSKI wiederholt und das Resultat von SMOLUCKOWSKI bestätigt und ausserdem gefunden, dass der Wert von  $\frac{\gamma}{\lambda}$  bei den allerniedrigsten Drücken abnimmt.

Während SMOLUCKOWSKI und GEHRCKE für die Bestimmung von dem Temperatursprung die totale Wärmeleitung zwischen zwei Oberflächen untersuchten, hat LAZAREFF<sup>3</sup> den Temperaturverlauf zwischen den Platten direkt gemessen und hieraus den Wert für  $\frac{\gamma}{\lambda}$  bestimmt.

SMOLUCKOWSKI hat mit Hilfe der kinetischen Gastheorie den Wert für  $\gamma$  theoretisch berechnet; erst laut der einfachen kinetischen Theorie von CLAUSIUS und später, ausgehend von der exakten kinetischen Theorie von Maxwell, für Moleküle, welche sich wie nach der umgekehrten 5ten Potenz von der Entfernung abstossende Kraftcentra verhalten.

Später hat MARTIN KNUDSEN<sup>4</sup> im Zusammenhang mit seinen bekannten Untersuchungen über die molekulare Wärmeleitung der Gase sich mit dem Temperatursprung beschäftigt und den Zusammenhang zwischen dem Temperatursprung und dem Akkommodationskoeffizienten,  $a$ , auseinandergesetzt.

SMOLUCKOWSKI<sup>5</sup> fand theoretisch nach der kinetischen Gastheorie für einatomige Gase:

<sup>1</sup> C. F. BRUSH: Phil. Mag. 45 (1898) p. 31.

<sup>2</sup> E. GEHRCKE: Ann. d. Ph. 2 (1900). p. 102.

<sup>3</sup> P. LAZAREFF: Ann. d. Ph. 37 (1912) p. 233.

<sup>4</sup> MARTIN KNUDSEN: Ann. d. Ph. 34 (1911) p. 651.

<sup>5</sup> M. VON SMOLUCKOWSKI: Wiener Ber. 108 (1899) p. 5; Wied. Ann. 64 (1898) p. 101.

$$\gamma = \frac{15}{16} \sqrt{2\pi} \frac{2-a}{a} \cdot \frac{\eta}{\sqrt{p\varrho}}, \quad (1)$$

wo  $\eta$ ,  $\varrho$  und  $p$  der innere Reibungskoeffizient, bzw. die Dichte und der Druck des Gases sind.

Führen wir in diesem Ausdruck die mittlere freie Weglänge,  $\lambda$ , nach S. CHAPMAN<sup>1</sup> ein, dann finden wir, weil:

$$p\lambda = \frac{1}{0,499} \sqrt{\frac{\pi}{8}} \cdot \frac{\eta_0}{\sqrt{1\varrho_0}} \left(\frac{T}{T_0}\right)^{1+n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\eta_0}{\sqrt{1\varrho_0}} \left(\frac{T}{T_0}\right)^{1+n} = {}_1\lambda_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{1+n},$$

dass der Temperatursprungskoeffizient für einatomige Gase wird:

$$\gamma = \frac{15}{4} \cdot \frac{2-a}{2a} \cdot \lambda$$

§ 2. Wie bereits erwähnt, können die vorliegenden experimentellen Untersuchungen in zwei Klassen geteilt werden, nämlich die Bestimmungen von  $\gamma$  aus der totalen Wärmeleitung zwischen zwei Oberflächen und die Bestimmungen von  $\gamma$  durch direkte Messung von dem Temperaturverlauf zwischen den Oberflächen mit verschiedener Temperatur. Nach der ersten Methode untersuchten v. SMOLUCKOWSKI und GEHRCKE atmosphärische Luft und Wasserstoff, während LAZAREFF nach der zweiten Methode untersuchte atm. Luft, Wasserstoff und Kohlensäure; die verwendeten Oberflächen, wozwischen die Wärmeleitung von statten ging, waren entweder reine Glasoberflächen oder blanke, glatte Metalloberflächen.

Die Resultate von diesen Messungen sind in der Tabelle I zusammengestellt, wo sowohl die Werte von  $\frac{\gamma}{\lambda_M}$  ( $\lambda_M$  = die O. E. MEYER'SCHE freie Weglänge), wie auch die Werte von

<sup>1</sup> S. CHAPMAN: Vgl. J. H. JEANS: The Dyn. Theory of Gases, 1925, p. 276.



$\frac{\gamma}{\lambda}$  ( $\lambda$  = die CHAPMAN'sche freie Weglänge) aufgenommen sind; wie man sieht, ist die Übereinstimmung zwischen den Resultaten von den zwei Messmethoden befriedigend, wenn in Betracht gezogen wird, dass die verwendeten Oberflächen verschieden sind.

Tabelle I.

	SMOLUCKOWSKI	GEHRCKE	LAZAREFF
	$\frac{\gamma}{\lambda_M}$	$\frac{\gamma}{\lambda_M}$	$\frac{\gamma}{\lambda_M}$
H <sub>2</sub> .....	6.95	5.70	7.68
Atm. Luft .....	1.70	1.83	1.67
CO <sub>2</sub> .....	—	—	1.69
	$\frac{\gamma}{\lambda}$	$\frac{\gamma}{\lambda}$	$\frac{\gamma}{\lambda}$
H <sub>2</sub> .....	11.22	9.20	12.40
Atm. Luft .....	2.75	2.96	2.70
CO <sub>2</sub> .....	—	—	2.73

Die experimentelle Untersuchung von LAZAREFF ist sehr schön durchgeführt, und sein Apparat ist so konstruiert, dass es nicht zu erwarten ist, dass die Temperaturverteilung zwischen den Platten durch entstehende thermische Gleitströme, bezw. Konvektionsströme, beeinflusst worden ist. —

Später haben W. MANDELL und WEST<sup>1</sup> diese Untersuchungen nach der Methode von LAZAREFF wiederholt und sehr abweichende Resultate gefunden, u. A. Temperaturunterschiede zwischen den Platten und dem Gase, die nur durch Konvektionsströmungen erklärt werden können; wenn man aber die Konstruktion des von M. und W. verwendeten Messapparates kritisch untersucht, sieht man sofort, dass die zwei

<sup>1</sup> W. MANDELL and J. WEST: Proc. Phys. Soc. London 37 (1925) p. 20.

Oberflächen, wozwischen der Temperaturverlauf gemessen wird, direkt durch einen Kupfercylinder verbunden sind; durch den Temperaturgradienten in dieser Cylinderfläche entstehen thermische Gleitströmungen der Cylinderfläche entlang, und diese Strömungen, die wahrscheinlich in dem Apparat von M. und W. sehr regelmässig gewesen sind, bleiben bis zu den niedrigsten Drücken bestehen und beeinflussen den Temperaturverlauf zwischen den Platten; auch in dem von LAZAREFF verwendeten Apparat werden diese Gleitströmungen entstehen können, aber werden durch die besondere Konstruktion des Apparates nicht zwischen den Messflächen durchdringen.

Aus den Untersuchungen von MANDELL und WEST, die der weniger glücklichen Konstruktion des Messapparates wegen bei den höheren Drücken ganz falsche Resultate von der Grösse des Temperatursprunges geben, geht aber hervor, dass bei den allerniedrigsten Drücken der Temperaturverlauf zwischen den Platten in Luft und Wasserstoff sich nicht mehr ändert, sondern konstant wird, und dass die Temperatur des Gases in diesem Falle gegeben ist durch:

$$T = \frac{1}{2} (T_1 + T_2),$$

so wie man auch nach den Untersuchungen von MARTIN KNUDSEN über die molekulare Wärmeleitfähigkeit erwarten müsste, jedenfalls wenn die Akkommodationskoeffizienten von den zwei Platten dieselben sind.

In diesem Falle, also  $\bar{p} \rightarrow 0$  oder  $\frac{d}{\lambda} \cong 0$ , wird der Temperatursprung bei den Platten:

$$\Delta T = T_1 - \frac{1}{2} (T_1 - T_2) = \frac{1}{2} (T_1 + T_2)$$

§ 3. In einer Reihe von Experimentaluntersuchungen habe ich<sup>1</sup> früher Präzisionsbestimmungen von der Wärmeleitfähigkeit der Gase ausgeführt; diese Bestimmungen wurden nach einer verbesserten SCHLEIERMACHER'schen Methode gemacht, und teilweise wurden sie auch kontrolliert durch Messungen mit verschiedenen Doppelapparaten nach GOLDSCHMIDT; die verwendeten Apparate waren alle so konstruiert, dass die Bestimmungen von der Wärmeleitfähigkeit nicht durch Konvektion oder bekannte Fehlerquellen beeinflusst waren; gleichzeitig mit der Bestimmung von der Wärmeleitfähigkeit des Gases wurde für die untersuchten Gase der Temperatursprung gegenüber glatten, blanken Platinoberflächen bestimmt.

Bei den Messungen von dem Temperatursprung wurde mit 4 verschiedenen Apparaten gearbeitet; App. I und II waren verbesserte SCHLEIERMACHER'sche Apparate mit dickem Draht, während die Apparate 4 und 6 nach der Methode von GOLDSCHMIDT gebaut waren; in der Tabelle II sind die Konstanten für diese Apparate angegeben;  $2r_0$  ist der Diameter des verwendeten Platindrahtes, und  $2R_0$  ist der innere Diameter des umgebenden Glasrohres; die nähere Umschreibung und Konstruktion sind in den citierten Abhandlungen zu finden.

Tabelle II.

App. I (Schl.) . . . . .	$2r_0 = 0.040784$ cm	$2R_0 = 2.3441$ cm
„ II (Schl.) . . . . .	„ = 0.040746 cm	„ = 2.5424 cm
„ 4 (Golds.) . . . . .	„ = 0.005246 cm	„ = 1.526 cm
„ 6 (Golds.) . . . . .	„ = 0.005246 cm	„ = 1.449 cm

Aus der observierten Wärmeabgabe des geheizten Platindrahtes  $Q_\infty$  für  $p \rightarrow \infty$  und  $Q_p$  bei dem Druck  $p$  wurde

<sup>1</sup> SOPHUS WEBER: Ann. d. Ph. Bd. 54 (1917) p. 326 und p. 437; Comm. Kamerlingh Onnes Lab. Leiden. Suppl. No. 42 b, 1918; Ann. d. Ph. Bd. 82 (1927) p. 479.



$\gamma_1$  bei dem Druck  $p$  für die geheizte Platinoberfläche bestimmt durch die bekannte Formel:

$$\gamma_1 = \frac{\ln \frac{R_0}{r_0}}{\frac{1}{r_0} + \frac{1}{R_0} \cdot \frac{\gamma_2}{\gamma_1}} \left\{ \frac{Q_\infty}{Q_p} - 1 \right\} \quad (2)$$

$\gamma_2$  ist der Wert des Temperatursprungskoeffizienten an der Glasoberfläche,  $2 \pi R_0$ , und bei der Berechnung wurde in Übereinstimmung mit den Messungen von MARTIN KNUDSEN angenommen, dass  $\gamma$  denselben Wert für Glas und blankes, glattes Platin hat; wo es sich ausserdem in diesen Messungen, weil  $\frac{r_0}{R_0}$  sehr klein ist, nur um eine kleine Korrektion für  $\gamma_1$  handelt, ist ein kleiner Unterschied zwischen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  ohne grössere Bedeutung für die Bestimmung von  $\gamma_1$ .

Aus den Messungen geht hervor, dass  $\gamma \cdot p$ , bezw.  $\frac{\gamma}{\lambda}$ , in einem grossen Bereich konstant ist; das Endresultat von den Messungen, nachdem diese Neuberechnet sind, ist in Tabelle III, Kolonne 7, angegeben; insbesondere sind die Bestimmungen mit dem App. 6 gut, aber die gegenseitige Übereinstimmung der Versuchsreihen ist durchaus befriedigend; der Wert für  $\text{CO}_2$  ist in guter Übereinstimmung mit dem Wert von LAZAREFF; hierauf werde ich in dem Folgenden zurückkommen.

Aus dieser Tabelle III geht hervor, dass die von mir bestimmten Werte gut mit einander und auch mit den früheren observierten Werten übereinstimmen; dieses gilt sowohl für zweiatomige Gase, als auch für mehratomige, wie z. B.  $\text{CO}_2$ ; wenn wir die beobachteten Werte in Kolonne 7 vergleichen mit den Werten in Kolonne 11, die nach der Formel von SMOLUCKOVSKI für einatomige Gase und mit den

Tabelle III.

	$\left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)_{T_0} = 273 \cdot 1$ ( $\lambda$ nach S. CHARMAN)				Wahrscheinlichster Wert für $\left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)_{T_0}$	$(p \cdot \lambda)_{T_0}$	Akkommodationskoeffizienten, $a_{T_0}$		$\left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)_{T_0}$ ber. aus $2 - \frac{a}{3,75 \cdot 2a}$	Akkommodationskoeff. $a_{T_0}$ berechnet aus $\frac{\gamma}{\lambda}$
	App. I	App. II	App. 4	App. 6			nach KNUDSEN <sup>1</sup>	nach SCHMIDT <sup>2</sup>		
1) Ar.	..	2.54	..	..	2.54	6.29	0.852	—	2.52	—
2) He	8.48	8.54	..	..	8.50	17.72	0.338	0.336	9.25	..
3) Ne	3.58	3.64	3.93	..	3.90	12.56	0.653	0.670	3.88	..
4) H <sub>2</sub>	11.70	11.72	..	..	11.70	11.31	0.278	0.283	11.63	..
5) O <sub>2</sub>	..	2.74	..	..	2.74	6.45	0.80	..	2.81	..
6) N <sub>2</sub>	..	2.44	..	..	2.44	5.98	—	0.855	2.50	..
7) Atm. Luft	..	2.95	..	..	2.85	6.04	0.80	..	2.81	..
8) CO	..	..	..	..	..	5.94	..	..	..	..
9) CO <sub>2</sub>	..	2.80	..	..	2.74	3.91	0.81	..	2.78	..
10) N <sub>2</sub> O	..	3.23	..	..	3.23	4.85	—	..	—	0.74
11) CH <sub>4</sub>	..	2.64	..	..	2.64	3.89	..	..	..	0.83

<sup>1</sup> MARTIN KNUDSEN: Ann. d. Phys., 46 (1915) p. 641.<sup>2</sup> G. SCHMIDT: Comm. Kamerlingh Onnes Lab., Leiden, 242c.

bekannten Werten für die Akkommodationskoeffizienten berechnet sind, dann sehen wir, dass die Übereinstimmung sehr befriedigend ist, obwohl die Übereinstimmung für Helium etwas nachlässt; der Faktor  $k_1 = \frac{15}{4} = 3,75$  in der Formel von SMOLUCKOWSKI gilt also nicht nur für einatomige Gase, sondern ist auch für mehratomige Gase gültig; diese experimentelle Tatsache ist sehr interessant und von grosser Bedeutung, weil es hierdurch möglich wird den Akkommodationskoeffizienten,  $a$ , aus einer Messung von dem Temperatursprung zu bestimmen; dieses ist in der Tabelle für  $N_2O$  und  $CH_4$  zum Ausdruck gebracht.

§ 4. In der Ableitung von der Formel (1) für den Temperatursprung hat SMOLUCKOWSKI<sup>1</sup> die mathematisch exakte Maxwell'sche Berechnungsmethode verwendet und also angenommen, dass die Moleküle als Kraftcentra, die sich gegenseitig mit einer Kraft, umgekehrt proportional mit der 5ten Potenz der Entfernung, abstossen, aufgefasst werden können; diese Berechnung, die im Allgemeinen der Grösseordnung nach richtige Resultate gibt, wie auch die späteren theoretischen Untersuchungen von S. CHAPMAN<sup>2</sup> und D. ENSKOG<sup>3</sup> gezeigt haben, ist in der kinetischen Gastheorie sehr zu empfehlen, obwohl die Methode wenig anschaulich und übersichtlich ist.

In dem Folgenden werden wir aber den Temperatursprung näher betrachten, indem wir ausgehen von der mehr anschaulichen Methode, welche MARTIN KNUDSEN<sup>4</sup> bei seinen Betrachtungen über den Zusammenhang zwischen der molekularen Wärmeleitung und der Maxwell'schen Wärme-

<sup>1</sup> M. VON SMOLUCKOWSKI: loc. cit.

<sup>2</sup> S. CHAPMAN: Phil. Trans. 216 (A) (1915) p. 279.

<sup>3</sup> D. ENSKOG: Inaug. Diss., Upsala, 1917.

<sup>4</sup> MARTIN KNUDSEN: loc. cit.

leitung verwendet hat; ich werde nachweisen, dass diese Methode auch für die kinetische Theorie numerisch richtige Resultate gibt<sup>1</sup>; dieses findet m. E. seine Erklärung darin, dass die individuellen Eigenschaften der Moleküle, herrührend von den molekularen Kraftfeldern, in der Temperaturabhängigkeit der mittleren freien Weglänge zum Ausdruck kommen.

Wie aus dem Folgenden hervorgeht, gibt die KNUDSEN'sche Methode eine übersichtliche Ableitung von den Unterschieden in den Formeln für ein- und mehratomige Gase.

Zu diesem Zweck betrachten wir ein Gas in dem MAXWELL'schen Zustand, d. h. den Zustand, in welchem die mittlere freie Weglänge,  $\lambda$ , sehr klein gegenüber den massgebenden Abmessungen des Apparates ist; für den Maxwell'schen Zustand gilt also  $\frac{\lambda}{d} \cong 0$ ; wird aber  $\frac{d}{\lambda} \cong 0$  gültig, haben wir den KNUDSEN'schen Zustand des Gases; in dem Maxwell'schen Zustand sind die Wärmeleitfähigkeit,  $K$ , und innere Reibung,  $\eta$ , unabhängig von der Dichte.

Wenn in dem Gase ein Temperaturgradient herrscht, betrachten wir, Fig. 1, am einfachsten zwei parallele Metallplatten,  $A$  und  $B$ , mit dem Abstand,  $d$ , und mit den Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$ ; wir setzen nun voraus:  $\frac{\lambda}{d} \rightarrow 0$ . Zwischen den Platten und parallel mit diesen denken wir uns zwei Flächen,  $V_1$  und  $V_2$ , deren Abstand,  $b$ , klein gegenüber  $\lambda$  ist; die Wärmemenge,  $Q$ , die in dem stationären Zustand per Sek. und per  $\text{cm}^2$  zwischen diesen beiden

<sup>1</sup> Wenn man den Einfluss von magnetischen oder elektrischen Feldern auf der Wärmeleitung oder der inneren Reibung der Gase theoretisch untersuchen will um den observierten Effekt zu erklären, ist es wahrscheinlich empfehlungswert erst den Einfluss der Felder in dem Knudsen-Zustand der Gase zu untersuchen (vgl. HERMANN SENFTLEBEN und O. RIECHENMEYER: Ann. der Ph. 6, 105, 1930; HERMANN SENFTLEBEN: Phys. Z. S., 31, 961, 1930 und Z. f. Phys. 74, 757, 1932.)



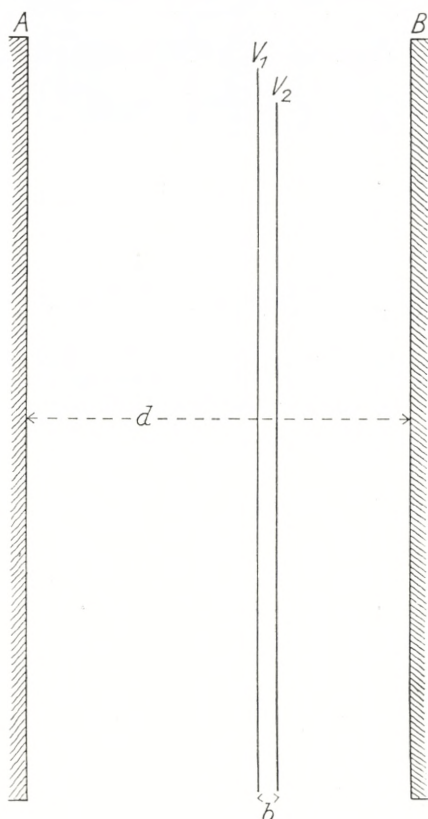


Fig. 1.

Flächen,  $V_1$  und  $V_2$ , transportiert wird, lässt sich, wenn  $\varepsilon$  die molekulare Wärmeleitung bezeichnet, schreiben:

$$Q = \varepsilon \cdot p \cdot \Delta t$$

$p$  ist der Druck des Gases und  $\Delta t$  die Temperaturdifferenz der durch die Flächen in entgegengesetzter Richtung sich bewegendes Moleküle.

Dieser Ausdruck muss nach KNUDSEN so aufgefasst werden, dass man, falls die Geschwindigkeiten der von rechts kommenden Moleküle sich steigerten, so dass sie gleiche



Geschwindigkeiten wie die von links kommenden Moleküle bekämen, an dieser Stelle der Gasmasse ein homogenes Gas mit der Temperatur,  $t_1$ , haben würde; die Temperatur,  $t_2$ , der von rechts kommenden Moleküle wird in ähnlicher Weise aufgefasst; man hat dann:

$$\Delta t = t_1 - t_2.$$

Indem wir  $\Delta t$  als verschwindend klein gegenüber der absoluten Temperatur des Gases ansehen dürfen, wird die Temperatur von dem Gase zwischen den Flächen,  $V_1$  und  $V_2$ , gleich an  $t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$  sein, und von dieser Stelle aus wird die Temperatur sich nach beiden Seiten linear ändern, so dass:

$$t + x_1 \cdot \frac{dt}{dx} = t_1 \quad \text{und} \quad t - x_1 \cdot \frac{dt}{dx} = t_2$$

oder:

$$t_1 - t_2 = \Delta t = 2x_1 \cdot \frac{dt}{dx}.$$

Die Moleküle, die durch die Flächen,  $V_1$  und  $V_2$ , fliegen, werden dann im Mittel solche Geschwindigkeiten oder Eigenschaften, z. B. Bewegungsmenge, translatorische und innere Energie, haben, als wären sie alle aus den Entfernungen,  $x_1$ , von den Flächen  $V_1$  und  $V_2$  gekommen; eine einfache Überlegung zeigt, dass  $x_1$  proportional mit der mittleren freien Weglänge,  $\lambda$ , sein muss; wir setzen also:

$$2x_1 = k_1 \cdot \lambda, \quad \text{woraus} \quad x_1 = \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot \lambda.$$

Nach der einfachen kinetischen Gastheorie würde man erwarten, dass  $x_1 = \lambda$  wäre, und also  $k_1 = 2$ . Es ist aber einleuchtend, dass der Wert von  $x_1$ , bzw.  $k_1$ , nicht der-

selbe sein wird für den Transport von Bewegungsmenge (innere Reibung der Gase) und kinetischer Energie (Wärmeleitung der Gase), weil in dem letzten Falle die Transportgeschwindigkeit und die transportierte Menge nicht von einander unabhängig sind<sup>1</sup>; dasselbe gilt auch für den Transport von der translatorischen Energie und der inneren Energie der Moleküle, wenn wir nach der Hypothese von MARTIN KNUDSEN annehmen werden, dass die innere Energie ganz unabhängig von der translatorischen Energie über die Moleküle verteilt ist, aber doch so, dass der mitt-

<sup>1</sup> Es ist vielleicht nicht ohne Interesse den Energietransport in einem Gase näher zu betrachten. Für ein Gas mit der Temperatur  $T$  und  $N$  Molekülen per  $\text{cm}^3$  ist der Energieinhalt per  $\text{cm}^3$  an translatorische Energie,  $N \cdot \frac{1}{2} m \bar{\Omega}^2 = N \cdot \frac{3}{2} kT$  und an innere Energie,  $f \cdot N \cdot \frac{3}{2} kT$ ; hierin ist  $f = \frac{2}{3} \frac{1}{z-1} - 1$ , wo  $z = \frac{c_p}{c_v}$ .

Besteht im Gase ein Temperaturgradient, erhalten wir, dass der Energietransport für die translatorische Energie in der molekularen Wärmeleitung  $\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} m \bar{\Omega}^2 = 2 kT$  per Moleküle ist; dasselbe gilt auch für den Energietransport in der Molekularströmung; die Erklärung hierfür ist, wie bekannt, zu finden in der Abhängigkeit zwischen der Energie pro Moleküle  $\frac{1}{2} m \bar{\Omega}^2$  und der molekularen Transportgeschwindigkeit  $\bar{\Omega}$  in Verband mit dem Maxwell'schen Verteilungsgesetz; für die innere Energie besteht nach der Hypothese von MARTIN KNUDSEN dieser Verband nicht, und in diesem Falle wird der Energietransport für die innere Energie per Moleküle  $f \cdot \frac{3}{2} kT$ ; der ganze Energietransport per Moleküle wird also in der molekularen Wärmeleitung:

$$E = 2 kT + f \cdot \frac{3}{2} kT = 2 kT \left[ 1 + \frac{3}{4} \cdot f \right],$$

oder der Wert, den KNUDSEN angegeben hat.

Etwas besonderes ist es aber, dass die transportierte Energie per Moleküle für ein strömendes Gas in dem Maxwell'schen Zustand, z. B. in der Poiseulleströmung, nicht  $\frac{3}{2} kT$  ist, sondern  $\frac{5}{2} kT = \frac{3}{2} kT + kT$ ; die Erklärung hierfür ist, dass in dieser Strömung auch eine Arbeit  $p \cdot v = kT$  durch das Querschnitt geht (vgl. SOPHUS WEBER: Z. f. Ph. Bd. 24, 1924, p. 267).

lere Wert der einen dem mittleren Wert der andern proportional ist; ausserdem gilt für beide das Maxwell'sche Verteilungsgesetz.

Wenn wir vorläufig nur die translatorische Energie, bzw. einatomige Moleküle, betrachten, haben wir:

$$At = k_T \cdot \lambda \frac{dt}{dx}, \quad \text{woraus} \quad Q = k_T \cdot \epsilon_T \cdot p \lambda \frac{dt}{dx}.$$

Die Wärmemenge,  $Q$ , ist aber in dem Maxwell'schen Zustand des Gases gleich an  $K \frac{dt}{dx}$ , wo  $K$  die bekannte Wärmeleitfähigkeit des Gases ist; diese ist, wie bekannt, unabhängig von dem Druck, wenn  $\frac{\lambda}{d} \rightarrow 0$ .

Wir erhalten also in dem stationären Zustand:

$$K = k_T \cdot \epsilon_T \cdot p \lambda,$$

und in diesem Ausdruck sind alle Grössen bekannt mit Ausnahme von  $k_T$ .

Um den Wert von  $k_T$  zu bestimmen, ist es am einfachsten den gefundenen Wert für  $K$  mit dem Resultat von CHAPMAN und ENSKOG für einatomige Gase in dem MAXWELL'schen Zustande zu vergleichen. —

Wir nennen die spezifische Wärme bei konstantem Volumen für einatomige Gase,  $C_v$ , und für mehratomige Gase,  $c_v$ .

Aus der kinetischen Gastheorie folgt die bekannte Relation:

$$K = P \cdot c_v \cdot \eta,$$

die für einatomige Gase nach den Berechnungen von CHAPMAN und ENSKOG wird:

$$K = \frac{5}{2} \cdot C_v \cdot \eta.$$

Wenn wir nun diese zwei Werte für  $K$  — z. B. bei  $0^\circ \text{C}$  — vergleichen, dann erhalten wir den Wert für  $k_T$ . —

Nach CHAPMAN haben wir:

$$\eta = 0.499 \frac{m \bar{\Omega}_0}{\sqrt{2} \cdot \pi \sigma^2} \equiv \frac{1}{2} Nm \bar{\Omega}_0 \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi \sigma^2 \cdot N},$$

woraus:

$$\eta_0 = \frac{1}{2} Nm \bar{\Omega}_0 \lambda_0 \quad \text{und} \quad (p\lambda)_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta_0}{\sqrt{1\varrho_0}},$$

weil:

$$Nm = {}_1\varrho_0 \cdot p; \quad \bar{\Omega}_0 = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{1\varrho_0}} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi \sigma^2 \cdot N}.$$

Für einatomige Gase, die nur translatorische Energie besitzen, haben wir nach KNUDSEN:

$$\varepsilon_T = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1\varrho_0}} \cdot \frac{1}{T_0},$$

sodass wir bekommen:

$$K = k_T \cdot \varepsilon_T \cdot p\lambda = k_T \cdot \frac{\eta_0}{1\varrho_0} \cdot \frac{1}{T_0}.$$

Aus der CHAPMAN-ENSKOG'schen Formel für einatomige Gase wird erhalten:

$$K = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{T_0} \cdot \frac{1}{1\varrho_0} \cdot \eta_0, \quad \text{weil} \quad C_{v,0} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{T_0} \cdot \frac{1}{1\varrho_0}.$$

Hieraus folgt:

$$k_T = \frac{15}{4}.$$

§ 5. Bevor wir nun zu der Wärmeleitung für mehratomige Gase übergehen, werden wir erst den analogen Fall



für den Transport von Bewegungsmenge (innere Reibung) betrachten; in diesem Falle würde man  $k_1 = 2$  erwarten, weil die transportierte Menge und die Transportgeschwindigkeit von einander unabhängig sind.

In einer früheren Abhandlung über Wärmeleitfähigkeit von Gasgemischen<sup>1</sup> habe ich in Analogie mit der molekularen Wärmeleitung die molekulare Reibung,  $\mu$ , in der folgenden Weise eingeführt:

Wir betrachten wieder zwei parallele Platten,  $V_1$  und  $V_2$ , in einem Gase, wobei der Abstand der Platten sehr viel kleiner als die mittlere freie Weglänge,  $\lambda$ , sei; bewegt sich die Platte  $V_2$  in ihrer eigenen Ebene mit der Geschwindigkeit,  $v$ , so wird per  $\text{cm}^2$  und per Sek. an die Platte  $V_1$  die Bewegungsmenge,  $M$ , übergeführt, wo:

$$M = \frac{1}{4} Nm \bar{\Omega} v = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{273 \cdot 1}{T}} \cdot \sqrt{1} \rho_0 \cdot p \cdot v = \mu \cdot p \cdot v,$$

$$\text{wo } \mu = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{273 \cdot 1}{T}} \cdot \sqrt{1} \rho_0$$

die molekulare Reibung ist.

Durch eine analoge Betrachtung, wie oben für die Wärmeleitung durchgeführt, in welcher nur  $\frac{dt}{dx}$  durch  $\frac{dv}{dx}$  ersetzt wird, erhalten wir:

$$\eta = k_\eta \cdot \mu \cdot p \lambda.$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit dem obenerwähnten Ausdruck für  $\eta$  von CHAPMAN:

$$\eta_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{m \bar{\Omega}}{\sqrt{2 \cdot \pi} \sigma^2} = \frac{1}{2} Nm \bar{\Omega} \lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8}{\pi}} \cdot \sqrt{1} \rho_0 \cdot p \lambda,$$

<sup>1</sup> SOPHUS WEBER: ANN. D. PH., Bd. 54, (1917) p. 482.



dann erhalten wir:

$$k_{\eta} \cdot \mu_0 \cdot p \lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{1 \varrho_0} \cdot p \lambda,$$

oder:

$$k_{\eta} = 2, \text{ weil } \mu_0 = \frac{1}{\sqrt{2} \pi} \sqrt{1 \varrho_0}.$$

In diesem Falle wird also  $k_{\eta} = 2$ , wie auch zu erwarten wäre.

Während wir für den MAXWELL'schen Zustand der einatomigen Gase nach CHAPMAN haben:

$$f'' = \frac{K}{C_v \cdot \eta} = \frac{k_T}{k_{\eta}} \cdot \frac{\varepsilon_T p \lambda}{\mu \cdot p \lambda} \cdot \frac{1}{C_v} = \frac{15}{8} \cdot \frac{\varepsilon_T}{\mu} \cdot \frac{1}{C_v} = \frac{5}{2},$$

erhalten wir für das Verhältnis  $f''$  für einatomige Gase in dem Knudsen-Zustand der Gase<sup>1</sup>:

$$f'' = \frac{\varepsilon_T}{\mu \cdot C_v} = \frac{4}{3},$$

woraus hervorgeht, dass für  $\frac{d}{\lambda} \Rightarrow \infty$ ,  $f'' = \frac{5}{2}$ , während  $f'' = \frac{4}{3}$  für  $\frac{d}{\lambda} \Rightarrow 0$ .

§ 6. Wir werden nun zu den mehratomigen Gasen übergehen und gehen aus von der Hypothese von KNUDSEN. Nennen wir den mittleren Wert von der translatorischen Energie der Moleküle,  $e_1$ , und von der Atomenergie,  $e_2$ , dann haben wir:

$$\frac{e_1 + e_2}{e_1} = k_{1,2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\frac{c_p}{c_v} - 1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{z - 1}.$$

<sup>1</sup> SOPHUS WEBER: Doktordisputats, København, 1916, p. 110.

Tabelle IV

	$K_0 \cdot 10^5$	$\eta_0 \cdot 10^5$	$(p \lambda)_{T_0}$	$\left(\frac{c_p}{c_v}\right)_{\text{theor.}}$	$\left(\frac{c_p}{c_v}\right)_{\text{beob.}}$	$\frac{K_0}{\epsilon_0 \cdot p \lambda}$	$K'' = \frac{9z-5}{z+1}$	
He .....	34.3	18.76	17.72	$1 + \frac{2}{3}$	—	3.68	$\frac{15}{4} = 3.75$	} mit $z = \frac{5}{3}$
Ne .....	11.12	29.11	12.56	„	—	3.76	„	
Ar .....	3.82	21.02	6.29	„	—	3.72	„	
H <sub>2</sub> .....	41.3	8.50	11.31	$1 + \frac{2}{5}$	..	3.34	$\frac{19}{6} = 3.17$	} mit $z = \frac{7}{5}$
O <sub>2</sub> .....	5.83	19.31	6.45	„	..	3.22	„	
N <sub>2</sub> .....	5.66	16.74	5.98	„	..	3.17	„	
Luft .....	5.74	17.22	6.04	„	..	—	„	
CO .....	5.37	16.65	5.94	„	..	3.06	„	
CO <sub>2</sub> .....	3.43	13.74	3.91	—	1.299 <sup>5</sup>	2.88	2.91	} mit $z = 1.30$
N <sub>2</sub> O .....	3.61	13.66	3.89	—	1.302	3.08	„	
CH <sub>4</sub> .....	7.20	10.29	4.86	—	1.304	2.97	„	mit $z = 1.30$

Durch eine kritische Untersuchung von den Werten von  $K_0$ ,  $\eta_0$  und  $\frac{c_p}{c_v}$  wäre es möglich, dass die Übereinstimmung noch etwas besser wird.

Betrachten wir nun wieder den Wärmetransport zwischen den zwei Flächen,  $V_1$  und  $V_2$ , dürfen wir in diesem Falle, wie bereits oben erwähnt, nicht annehmen, dass der Abstand  $x_1$  für die translatorische und die innere Energie derselbe ist; wir müssen also schreiben:

Für die translatorische Energie:

$$t_1 - t_2 = \Delta t = 2x_1 \cdot \frac{dt}{dx} = k_T \cdot \lambda \cdot \frac{dT}{dx},$$

und für die innere Energie:

$$t'_1 - t'_2 = \Delta t' = 2x'_1 \cdot \frac{dt'}{dx} = k_A \cdot \lambda \cdot \frac{dT}{dx},$$

woraus:

$$t'_1 - t'_2 = \frac{k_A}{k_T} (t_1 - t_2),$$

und für den totalen Energietransport im Gase:

$$\begin{aligned} Q &= \varepsilon_T \cdot p (t_1 - t_2) + \varepsilon_A \cdot p (t'_1 - t'_2) \\ &= (k_T \cdot \varepsilon_T + k_A \cdot \varepsilon_A) \cdot p \lambda \frac{dT}{dx} = K \cdot \frac{dT}{dx}. \end{aligned}$$

Nach dem Vorhergehenden ist  $k_T = \frac{15}{4}$ ; für die innere Energie müssen wir aber, wenn wir von der Hypothese von KNUDSEN ausgehen, in Analogie mit dem Transport von Bewegungsmenge (innere Reibung),  $k_A = 2$  setzen, weil auch die innere Energie in diesem Falle unabhängig von der molekularen Transportgeschwindigkeit ist; wir erhalten hieraus:

$$Q = \left( \frac{15}{4} \varepsilon_T + 2 \varepsilon_A \right) p \lambda \frac{dT}{dx} = K \frac{dT}{dx} = k'' \varepsilon p \lambda \frac{dT}{dx},$$

$$\text{wo } \varepsilon = \varepsilon_T + \varepsilon_A.$$

Nun ist aber:  $\varepsilon_A = \frac{3}{4} \cdot f \cdot \varepsilon_T$ , wo  $f = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{z-1} - 1$ , und man bekommt also hieraus für mehratomige Gase:

$$K = k'' \cdot \varepsilon \cdot p \lambda = \frac{9z-5}{z+1} \cdot \varepsilon \cdot p \lambda,$$

$$\text{oder } k''_{\text{teor.}} = \frac{9z-5}{z+1}.$$

Wir können nun diesen theoretischen Wert,  $k''_{\text{teor.}} = \frac{9z-5}{z+1}$ , vergleichen mit dem experimentellen Wert,  $k''_{\text{obs.}} = \frac{K}{\varepsilon p \lambda}$ ; das Resultat wird in der Tabelle IV gesehen.

Aus der Tabelle IV sehen wir, dass die Übereinstimmung zwischen dem experimentellen Wert:  $k''_{\text{obs.}} = \frac{K}{\varepsilon p \lambda}$  und dem theoretischen Wert:  $k''_{\text{teor.}} = \frac{9z-5}{z+1}$  sehr befriedigend ist, sowohl für einatomige, als für mehratomige Gase, und wir dürfen also hieraus schliessen, dass der verwendete Wert,  $k_A = 2$ , auch für diesen Fall richtig ist.

§ 7. Wir können nun auch für mehratomige Gase den Faktor  $P$  in der Formel:

$$K = P \cdot c_v \cdot \eta \tag{3}$$

bestimmen.

Setzen wir in dieser Formel die gefundenen Werte für  $K$  und  $\eta$  ein, dann bekommen wir:

$$\frac{9z-5}{z+1} \cdot \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{z+1}{z-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1Q_0}} \cdot \frac{1}{T_0} \cdot p \lambda = P \cdot c_v \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{1Q_0} \cdot p \lambda,$$

weil nach KNUDSEN:

$$\varepsilon = \varepsilon_T + \varepsilon_A = \varepsilon_T \left( 1 + \frac{3}{4} f \right) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{z+1}{z-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{19_0}} \cdot \frac{1}{T_0}.$$

Wo aber:

$$c_v = C_v \cdot \frac{\frac{2}{3}}{z-1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{19_0} \cdot \frac{1}{T_0} \cdot \frac{\frac{2}{3}}{z-1},$$

erhalten wir:

$$P = \frac{1}{4} (9z - 5). \quad (4)$$

Dieser Ausdruck von  $P$  ist bereits von A. EUCKEN<sup>1</sup> angegeben; ausgehend von der KNUDSEN'schen Hypothese, dass die innere Energie unabhängig von der translatorischen Energie über die Moleküle verteilt ist, nimmt EUCKEN an, dass die Wärmeleitung für mehratomige Gase geschrieben werden kann:

$$K = \frac{5}{2} \cdot c_t \cdot \eta + c_r \cdot \eta;$$

$c_t$  und  $c_r$  bezeichnen den der Translationsenergie bzw. Rotationsenergie entsprechenden Anteil der spezifischen Wärme bei konstantem Volumen, woraus allgemein:

$$c_t + c_r = c_v.$$

Man hat aber:

$$c_t = C_v \text{ und } c_r = C_v \cdot \frac{\frac{5}{3} - z}{z-1}, \text{ woraus:}$$

$$K = \frac{1}{4} (9z - 5) c_v \cdot \eta. \quad (5)$$

<sup>1</sup> A. EUCKEN: Phys. Z. XIV, 1913 p. 324.



Die Übereinstimmung zwischen dem theoretischen Wert für  $P = \frac{1}{4} (9z - 5)$  und dem observierten Wert  $\frac{K}{c_v \cdot \eta}$  ist, wie bekannt, besonders schön (Vgl. JEANS: Theory of Gases, 1925, Tabelle auf Seite 301).

Hieraus geht also auch hervor, dass der Wert von  $k_A = 2$  richtig ist.

Es ist vielleicht in diesem Verband nicht ohne Interesse zu erwähnen, dass man für mehratomige Gase in dem Knudsen-Zustand erhält:

$$P_{\rightarrow 0} = \frac{\varepsilon_T + \varepsilon_A}{\mu \cdot c_v} = \frac{1}{2}(z + 1).$$

§ 8. Wir werden nun, nachdem  $k_T$  und  $k_A$  in dieser Weise bestimmt sind, den theoretischen Wert für den Temperatursprung betrachten, indem wir untersuchen werden, wie der Wärmeaustausch bei der Platte A, Fig. 1, vonstatten geht; erst untersuchen wir diesen Fall für ein einatomiges Gas.

Bei der Platte, A, hat man eine Gruppe von einströmenden und eine Gruppe von zurückgeworfenen Molekülen; wir nennen für die erste Gruppe die mittlere Geschwindigkeit der Moleküle  $\Omega'_1$  und die entsprechende Temperatur  $t_1$ ; für die zweite Gruppe sind die entsprechenden Grössen  $\Omega'_2$  und  $t_2$ ; ist die Temperatur der Platte,  $T_1$  hat man nach der Definition des Akkommodationskoeffizienten,  $a$ :

$$\bar{\Omega}'_2{}^2 = \bar{\Omega}'_1{}^2 + a(\bar{\Omega}_1^2 - \bar{\Omega}'_1{}^2)$$

$$\text{oder } 'E_2 = 'E_1 + a(E_1 - 'E_1)$$

$$\text{oder } t_2 = t_1 + a(T_1 - t_1),$$

$$\text{weil } \frac{1}{2} m \bar{\Omega}^2 = E = \frac{3}{2} kT.$$

Die Temperatur der an der Platte  $A$  grenzenden Gasschicht wird dann  $t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ , und der Temperatursprung:

$$\Delta T = T_1 - t = T_1 - \frac{1}{2}(t_1 + t_2),$$

oder:

$$\Delta T = \frac{2-a}{2a}(t_1 - t_2).$$

Die von der Platte  $A$ , pro Sek. und  $\text{cm}^2$ , weggeführte Wärmemenge, wird:

$$Q = \varepsilon_T \cdot p(t_1 - t_2) = K \frac{dT}{dx} = k_T \cdot \varepsilon_T \cdot p \lambda \frac{dT}{dx},$$

woraus:

$$t_1 - t_2 = k_T \cdot \lambda \cdot \frac{dT}{dx}, \quad \text{mit} \quad k_T = \frac{15}{4}.$$

Hieraus erhalten wir:

$$\Delta T = \frac{2-a}{2a} k_T \cdot \lambda \frac{dT}{dx} = \frac{15}{4} \cdot \frac{2-a}{2a} \cdot \lambda \frac{dT}{dx} \quad (6)$$

oder genau die Formel von SMOLUCKOWSKI für einatomige Gase.

Wir gehen nun zu den mehratomigen Molekülen über und betrachten wieder den Wärmeaustausch bei der festen Wand  $A$ ; für die Moleküle der einströmenden Gruppe dürfen wir, wenn der Wärmezustand stationär ist, annehmen, dass die translatorische und innere Energie in Temperaturgleichgewicht (Äquipartition) sind, weil die Moleküle kommen aus einer Gasmasse in dem Maxwell'schen Zustand; in diesem Falle entspricht sowohl die translatorische als die innere Energie der Temperatur  $t_1$ . Wenn diese Moleküle gegen die feste Wand  $A$  stossen, sind zwei Möglich-

keiten vorhanden, d. h. entweder ist der Akkommodationskoeffizient für die zwei Sorten Energie derselbe, oder man muss mit verschiedenen Akkommodationskoeffizienten für die zwei Sorten Energie rechnen. Der erste Fall ist nach den Untersuchungen von MARTIN KNUDSEN<sup>1</sup> der wahrscheinlichste, weil er durch seine Arbeit über Radiometerkraft und Wärmeleitung in Helium und Wasserstoff für blanke und »schwarze« Oberflächen nachgewiesen hat, dass der Akkommodationskoeffizient für die translatorische und die innere Energie der Wasserstoffmoleküle derselbe ist; in diesem Falle ist es deutlich, dass der Gleichgewichtszustand zwischen der translatorischen und inneren Energie in der einströmenden Molekülgruppe nach der Zurückwerfung nicht gestört sein wird; für die Moleküle in der ausgehenden Gruppe wird also auch Temperaturgleichgewicht zwischen den zwei Sorten Energie herrschen, und beide werden der Temperatur,  $t_2$ , entsprechen.

Bei der Berechnung des Temperatursprunges kann man in diesem Falle entweder den Energieaustausch für die gesammte Energie oder für eine der zwei Sorten, z. B. die translatorische Energie, untersuchen.

Wenn wir erst den Energieaustausch für die translatorische Energie untersuchen, dann erhalten wir genau dieselbe Berechnung wie für einatomige Gase und finden also wieder die Formel von SMOLUCKOWSKI; wir können dieses am einfachsten zeigen, wenn wir von der obengenannten Hypothese von EUCKEN ausgehen. Der Teil der Wärmeleitung, der nur von der translatorischen Energie herrührt, ist nach EUCKEN:

$$K_t = K - c_r \cdot \eta, \text{ weil } K = \frac{5}{2} c_t \cdot \eta + c_r \cdot \eta.$$

<sup>1</sup> MARTIN KNUDSEN: Kgl. D. Vid. Selsk., Mat. fys. Medd. XI. I. 1930.

Nun ist nach dem Vorhergehenden:

$$c_t + c_r = c_v = C_v \frac{\frac{2}{3}}{z-1} = C_v k_{1,2},$$

wo aber:

$$c_t = \frac{c_v}{k_{1,2}}, \text{ wird } c_t = C_v,$$

woraus:

$$K_t = \frac{5}{2} \cdot C_v \cdot \eta.$$

Laut der Transportgleichung haben wir:

$$Q_T = \varepsilon_T \cdot p (t_1 - t_2) = \frac{5}{2} \cdot C_v \cdot \eta \cdot \frac{dT}{dx},$$

woraus:

$$t_1 - t_2 = \frac{\frac{5}{2} \cdot \eta \cdot C_v}{\varepsilon_T \cdot p} \cdot \frac{dT}{dx} = \frac{15}{4} \lambda \frac{dT}{dx}.$$

Wo der Temperatursprung gegeben ist durch:

$$AT = \frac{2-a}{2a} (t_1 - t_2),$$

erhalten wir auch in diesem Falle:

$$AT = \frac{15}{4} \cdot \frac{2-a}{2a} \cdot \lambda \frac{dT}{dx}.$$

Betrachten wir noch eben in diesem Falle den Austausch der totalen Energie; wir können wieder für den Energieaustausch bei der festen Wand schreiben:

$$'E_2 = 'E_1 + a [E_1 - 'E_1],$$

wobei vorausgesetzt ist, dass der Akkommodationskoeffizient,  $a$ , derselbe ist für die zwei Sorten Energie; werden die ent-

sprechenden Temperaturen, bezw.  $t_1$  und  $t_2$ , der Molekülgruppen eingeführt, erhält man wieder:

$$t_2 = t_1 + a(T_1 - t_1),$$

und für den Temperatursprung:

$$\Delta T = \frac{2-a}{2a}(t_1 - t_2).$$

Die Gleichung für den Energieaustausch bei der festen Wand wird in diesem Falle:

$$Q = \varepsilon_T \cdot p(t_1 - t_2) + \varepsilon_A \cdot p(t'_1 - t'_2);$$

wo nach dem Vorhergehenden:

$$t_1 - t_2 = k_T \cdot \lambda \frac{dT}{dx} \quad \text{und} \quad t'_1 - t'_2 = k_A \cdot \lambda \frac{dT}{dx}.$$

Hieraus folgt:

$$Q = \varepsilon_T \cdot p(t_1 - t_2) + \varepsilon_A \cdot \frac{k_A}{k_T} (t_1 - t_2) = K \frac{dT}{dx}.$$

Nun ist aber:

$$K \frac{dT}{dx} = (k_T \varepsilon_T + k_A \varepsilon_A) p \lambda \frac{dT}{dx},$$

woraus:

$$t_1 - t_2 = \frac{k_T \varepsilon_T + k_A \cdot \varepsilon_A}{\varepsilon_T + \frac{k_A}{k_T} \cdot \varepsilon_A} \cdot \lambda \frac{dT}{dx} = k_T \cdot \lambda \frac{dT}{dx}$$

und also auch für mehratomige Gase:

$$\Delta T = k_T \cdot \frac{2-a}{2a} \lambda \frac{dT}{dx} = \frac{15}{4} \cdot \frac{2-a}{2a} \cdot \lambda \frac{dT}{dx}.$$

Wir sehen hieraus, dass diese theoretischen Betrachtungen zeigen, dass der Faktor,  $k_T$ , in der Formel für den Temperatursprung derselbe ist für ein- und mehratomige Gase, wenn der Akkommodationskoeffizient für die translatorische



und die innere Energie derselbe ist; umgekehrt dürfen wir annehmen, dass, wenn wir für ein Gas mit bekanntem Akkommodationskoeffizienten,  $a$ , den Faktor  $k_T = \frac{15}{4}$  experimentell finden, der Akkommodationskoeffizient für die translatorische und die innere Energie nicht wesentlich verschieden ist.

Nach Tabelle III ist dies also der Fall für die bis nun untersuchten Gase.

Hätte man in den obenstehenden Berechnungen nicht den Unterschied zwischen  $k_T$  und  $k_A$  berücksichtigt, sondern  $k_T = k_A$  gesetzt, dann hätte man erhalten:

$$K \frac{dT}{dx} = (\varepsilon_T + \varepsilon_A) \cdot p (t_1 - t_2) = Q,$$

woraus:

$$k'' (\varepsilon_T + \varepsilon_A) p \lambda \frac{dT}{dx} = (\varepsilon_T + \varepsilon_A) p (t_1 - t_2),$$

und also:

$$t_1 - t_2 = k'' \cdot \lambda \frac{dT}{dx},$$

wo:

$$k'' = \frac{9z - 5}{z + 1}.$$

In diesem Falle würde also der Faktor,  $k_n$ , in der Formel für den Temperatursprung:

$$\Delta T = k_n \frac{2 - a}{2a} \lambda \frac{dT}{dx},$$

sich ändern mit dem Wert von  $z$ ; die obenstehende Formel mit  $k_n = k'' = \frac{9z - 5}{z + 1}$  ist von H. S. GREGORY<sup>1</sup> abgeleitet. —

Diese Ableitung ist also nach dem Obenstehenden nicht einwandfrei und auch nicht in Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen (vgl. Tabelle III). —

<sup>1</sup> H. SPENCER GREGORY: Phil. Mag. (7) 22, 257, 1936.

Offen bleibt noch die Frage, wie die Formel für den Temperatursprung sich ändern würde, wenn die Akkommodationskoeffizienten für die translatorische und die innere Energie der Moleküle verschieden wären; in diesem Falle ist die mittlere, translatorische und innere Energie in der Gruppe von den zurückgeworfenen Molekülen nicht in Temperaturgleichgewicht, und es wird dann die Frage sein, welche mittlere Temperatur dieser Molekülgruppe zugemessen werden muss; nach der obenerwähnten Untersuchung von MARTIN KNUDSEN und dem Resultat in der Tabelle III, ist dieser Fall wohl wenig wahrscheinlich, und es hat darum vorläufig keinen Zweck hierüber theoretische Betrachtungen anzustellen.

§ 9. Aus den experimentellen Untersuchungen von GEHRCKE und LAZAREFF ist hervorgegangen, dass der Ausdruck  $\frac{\gamma}{\lambda}$  nur konstant ist, wenn das Gas in dem Maxwell'schen Zustand ist, also wenn  $\frac{d}{\lambda} \rightarrow \infty$ ; laut dem Experiment stellt es sich heraus, dass  $\frac{\gamma}{\lambda}$  abnimmt, wenn  $\frac{d}{\lambda}$  kleiner wird.

Weil GEHRCKE, wie auch LAZAREFF mit zwei parallelen Platten gearbeitet haben, wird es zweckmässig sein erst den Verlauf von dem Temperatursprung, bezw. Wärmeleitung und Temperaturverteilung zwischen zwei planparallelen Platten näher zu betrachten.

Betrachten wir, wie in Fig. 1, zwei planparallele Platten  $A$  und  $B$  mit den Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$  und den Akkommodationskoeffizienten  $a_1$  und  $a_2$ , dann erhalten wir, wenn wir den Abstand zwischen den Platten,  $d$ , nennen, und wenn  $\frac{d}{\lambda} \rightarrow \infty$ , für den Temperatursprung:

$$\text{bei der Platte } A: \Delta T_1 = T_1 - T'_1 = k_T \frac{2 - a_1}{2 a_1} \cdot \lambda \cdot \frac{dT}{dx},$$

und bei der Platte  $B$ :  $\Delta T_2 = T'_2 - T_2 = k_T \frac{2 - a_2}{2 a_2} \cdot \lambda \cdot \frac{dT}{dx}$ ,

$$\text{wo } k_T = \frac{15}{4}.$$

$\frac{dT}{dx}$  ist der Temperaturgradient im Gase dort, wo der gewöhnliche Maxwell'sche Zustand gilt; wir können also in der Mitte zwischen den Platten setzen:

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=\frac{d}{2}} = \frac{T'_1 - T'_2}{d} = \frac{T_1 - T_2}{1 + \frac{1}{2} k_T \left[ \frac{2 - a_1}{2 a_1} + \frac{2 - a_2}{2 a_2} \right] \cdot \frac{\lambda}{d}} \cdot \frac{T_1 - T_2}{d}. \quad (7)$$

Wir sehen hieraus, dass wir eine Abnahme von  $\frac{\Delta T}{\lambda}$  bzw.  $\frac{\gamma}{\lambda}$  erwarten müssen, wenn die Grösse:

$$\frac{1}{2} k_T \left[ \frac{2 - a_1}{2 a_1} + \frac{2 - a_2}{2 a_2} \right] \cdot \frac{\lambda}{d}$$

nicht mehr gegenüber 1 verschwindend klein ist, sowie dieses auch von GEHRCKE experimentell nachgewiesen ist.

Betrachten wir die Wärmeleitung zwischen den Platten, erhalten wir:

$$Q = K \cdot \frac{dT}{dx} = K \frac{1}{1 + \frac{1}{2} k_T \left[ \frac{2 - a_1}{2 a_1} + \frac{2 - a_2}{2 a_2} \right] \cdot \frac{\lambda}{d}} \cdot \frac{T_1 - T_2}{d}, \quad (8)$$

welche Formel für  $a_1 = a_2$  bereits von MARTIN KNUDSEN<sup>1</sup> angegeben ist.

Aus der Formel (7) können wir sehen, wie  $\frac{dT}{dx}$  zwischen den Platten sich mit  $\frac{\lambda}{d}$  ändert, und diese Formel können

<sup>1</sup> MARTIN KNUDSEN: loc. cit. pag. 656.

wir durch die Messungen von LAZAREFF über den Temperaturverlauf zwischen den Platten nachprüfen.

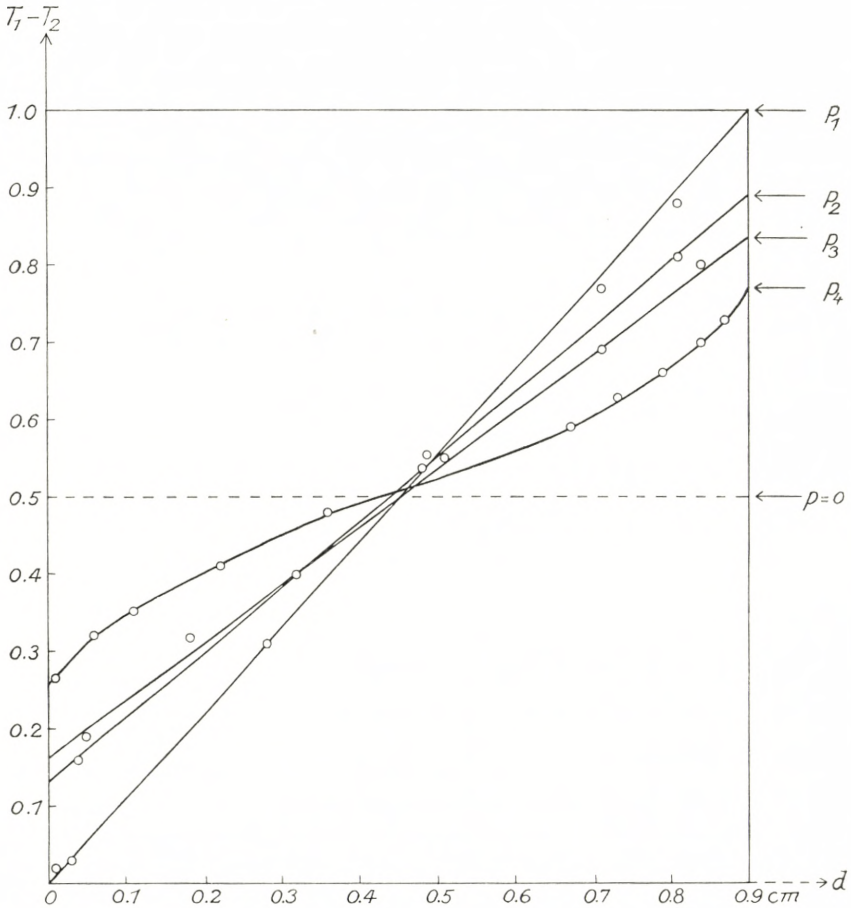


Fig. 2.

LAZAREFF<sup>1</sup> untersuchte mittels direkten Temperaturmessungen zwischen zwei Platten mit dem Abstand  $d = 0.90$  cm den Temperaturverlauf zwischen den Platten; er verwendete atmosphärische Luft und bestimmte u. A. den Temperaturverlauf bei den Drücken:

<sup>1</sup> P. LAZAREFF: loc. cit.

$$p_1 = 760,0 \quad \text{mm Hg}$$

$$p_2 = 0,087 \quad \text{mm Hg}$$

$$p_3 = 0,065 \quad \text{mm Hg}$$

$$p_4 = 0,019 \quad \text{mm Hg}$$

Die Platten hatten denselben Akkommodationskoeffizient, und bei hohem Druck fand LAZAREFF für atm. Luft  $\frac{\gamma}{\lambda} = 2,70$ , woraus:

$$\frac{15}{4} \cdot \frac{2-a}{2a} = 2,70 \quad \text{oder} \quad a = 0,82,$$

wie auch zu erwarten wäre für atm. Luft und glatte Oberflächen.

Die Resultate der Temperaturmessungen sind in Fig. 2 graphisch wiedergegeben, nachdem diese auf einem Temperaturunterschied,  $T_1 - T_2 = 1^\circ \text{C}$ , umgerechnet sind.

Aus diesen Kurven ist es einfach  $\frac{dT}{dx}$  in dem Gebiet, wo das Gas in dem Maxwell'schen Zustand ist, zu bestimmen; diese Werte sind in der Tabelle V in der Kolonne  $\left(\frac{dT}{dx}\right)_{\text{obs.}}$  wiedergegeben. Aus Formel (7) lässt sich nun für jeden Druck den Wert von  $\frac{dT}{dx}$  berechnen; die auf diese Weise berechneten Werte für die Drücke  $p_1, p_2, p_3$ , und  $p_4$  sind in der Tabelle unter  $\left(\frac{dT}{dx}\right)_{\text{ber.}}$  angegeben.

Tabelle V

Atm. Luft, $p$ in mm Hg		$\left(\frac{dT}{dx}\right)_{\text{obs.}}$ nach LAZAREFF	$\left(\frac{dT}{dx}\right)_{\text{ber.}}$ nach Form. 7.
$p_1 =$	760,0 mm	1,111	1,111
$p_2 =$	0,087 „	0,850	0,830
$p_3 =$	0,065 „	0,775	0,760
$p_4 =$	0,019 „	0,425	0,430
$p =$	0	—	0



Wir sehen hieraus, dass die Übereinstimmung zwischen  $\left(\frac{dT}{dx}\right)_{\text{obs.}}$  und  $\left(\frac{dT}{dx}\right)_{\text{ber.}}$  sehr befriedigend ist.

Aus der theoretischen Formel (7) geht hervor, dass für  $p \Rightarrow 0$ ,  $\frac{dT}{dx} = 0$  wird; d. h. dass die Temperatur des Gases zwischen den Platten in diesem Falle konstant wird. Nennen wir die Temperatur  $x$ , dann finden wir für diesen Fall:

$$\frac{T_1 - x}{x - T_1} = \frac{2 - a_1}{2 - a_2} \cdot \frac{a_2}{a_1} \quad \text{oder}$$

$$T'_1 = T'_2 = x = \frac{1}{2} \cdot \frac{a_1(2 - a_2)T_1 + a_2(2 - a_1)T_2}{a_1 + a_2 - a_1 a_2}.$$

Ist  $a_1 = a_2$  wird  $x = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$ ; dieses wird auch bestätigt durch die Messungen von MANDELL und WEST<sup>1</sup> bei den allerniedrigsten Drücken; die gefundenen kleinen Abweichungen können vollständig durch den Einfluss der Strahlung erklärt werden.

Die hier abgeleitete Formel für den Verlauf des Temperatursprunges findet sofort ihre Verwendung in der theoretischen Behandlung von dem absoluten Manometer von MARTIN KNUDSEN und von den experimentellen Untersuchungen von MARTIN KNUDSEN<sup>2</sup> und R. H. E. RASMUSSEN<sup>3</sup> über das Radiometereffekt von einem geheissten Band, wovon die zwei Seiten verschiedene Akkommodationskoeffizienten haben. —

Obwohl m. W. keine vollständigen Messungsreihen für den Verlauf von dem totalen Wärmetransport zwischen zwei parallelen Platten in dem ganzen Gebiet  $0 \leq \frac{d}{\lambda} \leq \infty$  vorliegen, werde ich in einer späteren Abhandlung auf dem Zusam-

<sup>1</sup> MANDELL und WEST: loc. cit.

<sup>2</sup> MARTIN KNUDSEN: Kgl. Danske Vid. Selsk. XI, 1, 1930.

<sup>3</sup> R. H. E. RASMUSSEN: Kgl. Danske Vid. Selsk. XI, 9, 1932 und XIII, 9, 1935.

menhang zwischen der totalen Wärmeleitung und dem Temperatursprung zwischen parallelen Platten und coaxialen Cylindern zurückkommen; für coaxiale Cylinder, bzw. ein dünnes Platinband, ausgespannt in der Achse eines umgebenden Glascylinders, liegt ein besseres und ziemlich vollständiges Versuchsmaterial vor. —

### Zusammenfassung.

Ausgehend von der von MARTIN KNUDSEN angegebenen Relation zwischen der MAXWELL'schen Wärmeleitfähigkeit,  $K$ , und der molekularen Wärmeleitfähigkeit,  $\varepsilon$ :

$$K = k \cdot \varepsilon \cdot p \cdot \lambda,$$

worin  $p$  der Druck und  $\lambda$  die mittlere freie Weglänge des Gases nach CHAPMAN sind, wird erst für den Transport der translatorischen Energie die Konstante  $k$  in dieser Formel bestimmt durch Vergleichung mit der bekannten CHAPMAN-ENSKOG'schen Formel für einatomige Gase:

$$K = \frac{5}{2} \cdot C_v \cdot \eta.$$

Für die translatorische Energie wird  $k = k_T = \frac{15}{4}$  und für die innere Energie  $k = k_A = 2$ .

In Anschluss hieran wird der Temperatursprung,  $\Delta T$ , bei einer Oberfläche mit dem Akkommodationskoeffizienten,  $a$ , sowohl für einatomige, als für mehratomige Gase abgeleitet; geltend für alle Gase wird gefunden:

$$\Delta T = \frac{15}{4} \cdot \frac{2-a}{2a} \cdot \lambda \cdot \frac{dT}{dx}.$$

In dieser Formel ist  $\frac{dT}{dx}$  der Temperaturgradient in der Richtung der Normale an der Oberfläche, während  $\lambda$  durch

die innere Reibung der Gase,  $\eta$ , bestimmt ist nach der CHAPMAN'schen Formel:

$$\eta = 0,499 N \cdot m \cdot \bar{\Omega} \lambda \equiv \frac{1}{2} Nm \bar{\Omega} \lambda$$

Die Formel für  $\mathcal{AT}$  wird mit dem früheren und mit dem Beobachtungsmaterial des Verfassers, unter Benutzung von den bekannten Werten des Akkommodationskoeffizienten, verglichen; die Übereinstimmung ist sowohl für einatomige, wie auch für mehratomige Gase, sehr befriedigend, sodass es hierdurch möglich wird den Akkommodationskoeffizienten,  $a$ , aus einer Messung des Temperatursprunges zu bestimmen, während es aus dem Wert des Temperatursprunges bei bekanntem Wert von  $a$  möglich ist zu sehen, inwieweit die Akkommodationskoeffizienten für die translatorische Energie und die innere Energie des Gases wesentlich von einander abweichen.

In Analogie mit dem molekularen Wärmeleitvermögen,  $\varepsilon$ , wird die molekulare Reibung,  $\mu$ , definiert; die Ableitung gibt:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{273 \cdot 1}{T}} \sqrt{1\varrho_0} \quad \text{und} \quad \eta = k_\eta \cdot \mu \cdot p \lambda,$$

Mit  $k_\eta = 2$  erhält man  $\eta = \frac{1}{2} Nm \bar{\Omega} \lambda$  in Übereinstimmung mit CHAPMAN.

Aus der molekularen Wärmeleitfähigkeit,  $\varepsilon$ , und aus dem Ausdruck für die molekulare Reibung,  $\mu$ , wird für mehratomige Gase den Wert von der Konstante,  $P$ , in der bekannten Formel:

$$K = P \cdot c_v \cdot \eta,$$

theoretisch abgeleitet.

Wird  $\frac{c_p}{c_v} = z$  gesetzt, erhält man:

$$P = \frac{1}{4} (9z - 5),$$

in Übereinstimmung mit der Hypothese von A. EUCKEN und den Zahlenwerten.

Ausserdem wird, gültig für alle Gase, die Relation:

$$\frac{K}{\varepsilon \cdot p \lambda} = \frac{9z - 5}{z + 1},$$

abgeleitet und durch die bekannten Zahlenwerte nachgeprüft; die Übereinstimmung ist sehr befriedigend.

Zum Schluss wird der Temperaturverlauf zwischen zwei parallelen Platten mit Abstand,  $d$ , und Temperaturdifferenz  $T_1 - T_2$ , unter Verwendung der Formel für den Temperatursprung, abgeleitet; ist der Akkommodationskoeffizient,  $a$ , für beide Oberflächen derselbe, erhält man in der Mitte zwischen den Platten:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T_1 - T_2}{d} \cdot \frac{1}{1 + \frac{15}{4} \cdot \frac{2 - a}{2a} \cdot \frac{\lambda}{d}},$$

welcher Ausdruck durch die LAZAREFF'schen Messungen bestätigt wird. —

Auch bei dieser Gelegenheit möchte ich der Direktion des Dänischen Carlsbergfonds meinen Dank für gewährte Stütze aussprechen.